PROBABILIDADES - 2º Ano MAEG **03.07.2018**

Exame ER

Nome:____**Número:**_________

Cotação: (Espaço reservado para classificações)

1. (15)	**3a.(15)**	**4. (15)**	**6a.(15)**	**8.(15)**
2a. (15)	**3b.(15)**	**5a.(10)**	**6b.(20)**	
2b. (10)	**3c.(10)**	**5b.(10)**	**7a.(10)**	
	3d.(10)		**7b.(15)**	

Nota: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. **[15]** Foi feita uma importante campanha publicitária de lançamento do refrigerante A nos principais canais de televisão. Com o objectivo de saber se a campanha influenciou a compra do refrigerante procedeu-se a um estudo de de mercado que permitiu apurar os seguintes resultados:
   - 55% das pessoas viram o anúncio na televisão;
   - 30% das pessoas compraram o refrigerante A;
   - 40% das pessoas nem viram o anúncio de televisão nem compraram o refrigerante A.

   Assuma como válidos para toda a população os resultados apurados neste estudo. De entre as pessoas que viram o anúncio, que percentagem comprou o refrigerante em causa?

   Sejam os acontecimentos V – a pessoa viu o anúncio – e A – compra o refrigerante A . Sabe-se que $P(V)=0.55$, $P(A)=0.30$ e $P(\bar{A}\cap\bar{V})=0.4$.

   $$P(A|V)=\frac{P(A\cap V)}{P(V)}=\frac{0.25}{0.55}=\frac{5}{11}\approx 0.4545$$

   Já que

   $$\begin{aligned}P(\bar{A}\cap\bar{V}) &= P(\overline{A\cup V}) \qquad \text{lei de De Morgan}\\ &=1-P(A\cup V)=1-\left(P(A)+P(V)-P(A\cap V)\right)\\ &=1-P(A)-P(V)+P(A\cap V)\end{aligned}$$

   e portanto

   $$P(A\cap V)=P(A)+P(V)+P(\bar{A}\cap\bar{V})-1=0.25$$

2. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional discreta com a seguinte função de probabilidade:

x\y	0	1	2	3
-1	0.05	0.05	0.10	0.10
0	0.02	0.03	0.05	0.10
1	0.08	0.12	0.15	0.15

   a. **[15]** Calcule $P(0<Y\le 1)$, $P(Y>0 | X=0)$ e $P(Y>1 | X\le 0)$

   $$P(0<Y\le 1)=0.2$$

   $$P(Y>0|X=0)=\frac{P(X=0\wedge Y>0)}{P(X=0)}=\frac{0.18}{0.20}=0.9$$

   $$P(Y>1|X\le 0)=\frac{P(X\le 0\wedge Y>1)}{P(X\le 0)}=\frac{0.35}{0.50}=0.7$$

b. **[10]** Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y.

$$E(X) = -0.3 + 0.5 = 0.2; \qquad E(Y) = 0.2 + 0.6 + 1.05 = 1.85$$
$$E(XY) = -0.05 - 0.2 - 0.3 + 0.12 + 0.3 + 0.45 = 0.32$$
$$E(X^2) = 0.3 + 0.5 = 0.8; \qquad E(Y^2) = 0.2 + 1.2 + 3.15 = 4.55$$

Logo $\rho = \dfrac{0.32 - 0.2\times 1.85}{\sqrt{\left(0.8-0.2^2\right)\left(4.55-1.85^2\right)}} = \dfrac{-0.05}{\sqrt{0.76\times 1.1275}} = -0.054$

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função de densidade conjunta dada por $f(x,y) = 5x^3$, $0 < x < 1$, $x < y < 2x$.

a. **[15]** Obtenha as funções densidade marginais de X e de Y.

$$f_X(x) = \int_x^{2x} 5x^3\,dy = 5x^4,\ 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{y/2}^{y} 5x^3\,dx & 0 < y < 1 \\ \int_{y/2}^{1} 5x^3\,dx & 1 < y < 2 \end{cases} \quad \text{isto é} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{75y^4}{64} & 0 < y < 1 \\ \dfrac{5}{4} - \dfrac{5y^4}{64} & 1 < y < 2 \end{cases}$$

b. **[15]** Calcule $P(X > 0.5, Y > 1)$ e obtenha $E(X)$ e $E(XY)$.

$$P(X > 0.5, Y > 1) = \int_1^2 \int_{y/2}^1 5x^3\,dx\,dy = \int_1^2 \frac{5}{4}\left(1^4 - \frac{y^4}{2^4}\right)dy = \left(\frac{5y}{4} - \frac{y^5}{64}\right]_1^2$$
$$= \left(\frac{10}{4} - \frac{32}{64}\right) - \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{64}\right) = \frac{49}{64} \simeq 0.7656$$

OU

$$P(X > 0.5, Y > 1) = \int_{0.5}^1 \int_1^{2x} 5x^3\,dy\,dx = \int_{0.5}^1 5x^3(2x-1)\,dx = \left(2x^5 - \frac{5x^4}{4}\right]_{1/2}^1$$
$$= \left(2 - \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{1}{16} - \frac{5}{64}\right) = \frac{49}{64}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f_X(x)\,dx = \int_0^1 5x^5\,dx = \left(\frac{5}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{5}{6} \approx 0.8333$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_x^{2x} 5x^4 y\,dy\,dx = \int_0^1 5x^4 \left(\frac{y^2}{2}\right]_x^{2x} dx = \int_0^1 5x^4\left(2x^2 - \frac{x^2}{2}\right)dx$$
$$= \int_0^1 \frac{15x^6}{2}\,dx = \left(\frac{15x^7}{14}\right]_0^1 = \frac{15}{14} \approx 1.0714$$

c. **[10]** Obtenha $f_{Y|X}(y\,|\,x)$. Calcule também $P(Y > 1\,|\,X = 0.7)$.

$f_{Y|X}(y\,|\,x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{5x^3}{5x^4} = \dfrac{1}{x}$, $x < y < 2x$, $0 < x < 1$ com x fixo. Dito de outra forma,

$Y\,|\,X = x \sim U(x, 2x)$ com x fixo e $0 < x < 1$.

$$P(Y > 1\,|\,X = 0.7) = \int_1^{1.4} (1/0.7)\,dy = 4/7$$

d. **[10]** Seja $U = 2Y - X$. Obtenha a função densidade conjunta do par (U, X) .

Seja então $\begin{cases} U = 2Y - X \\ V = X \end{cases}$. Resolvendo vem $\begin{cases} X = V \\ Y = \dfrac{U+V}{2} \end{cases}$ e portanto $J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = -1/2$.

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{5v^3}{2}, \quad 0 < v < 1, \; v < \frac{u+v}{2} < 2v \Leftrightarrow 2v < u+v < 4v \Leftrightarrow v < u < 3v$$

4. **[15]** Seja $M_X(s)$ a função geradora de momentos da variável aleatória X com $M_X(s) = \frac{6}{8} + \frac{1}{8}(e^{-s} + e^{s})$. Obtenha a variância de X e obtenha também uma expressão geral para o momento central de ordem r de X .

$$M_X(s) = \frac{6}{8} + \frac{1}{8}(e^{-s} + e^{s})$$

$M'_X(s) = \frac{1}{8}(-e^{-s} + e^{s})$ logo $E(X) = M'_X(0) = \frac{1}{8}(-1+1) = 0$

$M''_X(s) = \frac{1}{8}(e^{-s} + e^{s})$ logo $E(X^2) = M''_X(0) = \frac{1}{8}(1+1) = 0.25$ e portanto $\mathrm{var}(X) = 0.25$

Notando que as derivadas de ordem impar da fgm são sempre $\frac{1}{8}(-e^{-s} + e^{s})$ e que as derivadas de ordem par vêm sempre $\frac{1}{8}(e^{-s} + e^{s})$ tem-se $E\left((X-\mu)^r\right) = E\left(X^r\right) = M_X^{(r)}(0) = \begin{cases} 0 & r \text{ impar} \\ 0.25 & r \text{ par} \end{cases}$

5. O número de pequenas imperfeições em cada azulejo pintado à mão que são vendidos numa cadeia de lojas de "souvenirs" pode ser bem modelado por uma distribuição de Poisson de parâmetro 0.7. Assume-se naturalmente que este número é independente de azulejo para azulejo.

a. **[10]** Qual a probabilidade de numa caixa com 6 azulejos existirem mais de 3 imperfeições no conjunto dos azulejos? Recalcule esta probabilidade sabendo que o 1º azulejo tem uma imperfeição.

X - número de imperfeições num azulejo. $\quad X \sim Po(0.7)$

$Y = \sum_{i=1}^{6} X_i$ - número total de imperfeições num conjunto de 6 azulejos. $\quad Y \sim Po(4.2)$

$Z = \sum_{i=1}^{5} X_i$ - número total de imperfeições num conjunto de 5 azulejos. $\quad Z \sim Po(3.5)$

$$P(Y > 3) = 1 - P(Y \le 3) = 1 - 0.3954 = 0.6045$$

$$P(Z > 3-1) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0.3208 = 0.6792$$

b. **[10]** Qual a probabilidade de, numa caixa com 10 azulejos, apenas dois deles apresentarem mais de 2 imperfeições cada?

N - número de azulejos (em 10) com mais de 2 imperfeições cada.

$N \sim B(10, p)$ com $p = P(X > 2) = 1 - 0.9659 = 0.0341$

$$P(N=2)=0.0396 \quad \text{(computador ou conta)} = \binom{10}{2} 0.0341^2 0.9659^8$$

6. Seja X uma variável aleatória com $F(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ 1/8 & -1\le x<0 \\ 7/8 & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$.

   a. **[15]** Calcule $P(|X-\mu|\ge 2\sigma)$ sendo, como habitualmente μ e σ a média e o desvio-padrão de X .

      A função probabilidade de X vem $f_X(x)=\begin{cases} 1/8 & x=-1 \\ 6/8 & x=0 \\ 1/8 & x=1 \end{cases}$ logo $\mu=E(X)=0$,

      $E(X^2)=0.25$ e portanto $\sigma^2=\text{var}(X)=0.25$, isto é $\sigma=0.5$.

      $P\left(|X-\mu|\ge 2\sigma\right)=P\left(|X|\ge 0.5\right)=P(X=-1)+P(X=1)=2/8=0.25$

   b. **[20]** Calcule um limite superior para esta probabilidade, $P(|X-\mu|\ge 2\sigma)$, recorrendo à desigualdade de Chebyshev e utilizando os valores de μ e σ obtidos na alínea anterior. Comparando o resultado nesta alínea com aquele que obteve na alínea anterior o que pode concluir em termos gerais quanto ao limite fornecido pela desigualdade.

      Aplicando a desigualdade de Chebyshev vem $P(|X-\mu|\ge 2\sigma)\le 0.25$, já que $t=2$.

      Assim o valor exato corresponde ao limite superior dado pela desigualdade ficando claro que, muito embora a desigualdade forneça por vezes aproximações insatisfatórias, não se pode em termos gerais fazer melhor do que a desigualdade sem acrescentar condições adicionais.

7. A procura diária de cimento a granel (em toneladas) num entreposto pode ser bem modelada por uma variável aleatória com distribuição gama de parâmetros 2.5 e 3. Assuma que a procura num dia é independente da procura nos outros dias.

   a. **[10]** Qual a probabilidade da procura semanal (5 dias) ser superior a 6.275?

      X_i - Quantidade de cimento procurada no dia i. $\qquad X_i \sim G(2.5,3)$

      Seja $Y=\sum_{i=1}^{5} X_i$ a procura semanal. $Y\sim G(12.5,3)$ logo $6Y\sim\chi^2_{(25)}$

      $P(X>6.275)=P(Y>37.650)=0.050028(maq)\approx 0.05(tab)$

   b. **[15]** Sabendo que não há possibilidade de abastecimento durante a semana, qual deve ser a quantidade ter em armazém para cobrir a procura com probabilidade 0.9?

      Seja Y a procura semanal e seja k o stock disponível no início da semana

      Procura-se k tal que $P(Y\le k)=0.9$

      $P(Y\le k)=0.9 \Leftrightarrow P(6Y\le 6k)=0.9$ logo $6k=34.382$ e portanto $k=5.73$

      Já que da alínea anterior vem $6Y\sim\chi^2_{(25)}$

8. **[15]** Seja Y uma variável aleatória com distribuição Binomial de parâmetros 3 e 0.5 e seja $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \cdots$, uma sucessão de variáveis aleatórias tais que à variável X_n corresponde a função de distribuição

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{n+0.5}{8n+3} & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{4n+1.5}{8n+3} & 1 \le x < 2 \\ \dfrac{7n+1.5}{8n+3} & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}.$$

Mostre que $X_n \xrightarrow{D} Y$.

$$Y \sim B(3, 0.5) \text{ logo } F_Y(y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.125 = 1/8 & 0 \le x < 1 \\ 0.5 = 4/8 & 1 \le x < 2 \\ 0.875 = 7/8 & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}.$$

Como facilmente se deduz, $$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+0.5}{8n+3} & 0 \le x < 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+1.5}{8n+3} & 1 \le x < 2 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n+1.5}{8n+3} & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \le x < 1 \\ 4/8 & 1 \le x < 2 \\ 7/8 & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases} = F_Y(x)$$

logo $X_n \xrightarrow{D} Y$.